2次元場の量子論の最近の発展

浪川, 幸彦

代数幾何学シンポジウム記録
1988年度 pp.173-187

場の量子論の最近の発展

名古屋大学理学部 浪川 幸彦

§0．序

量子論物理学とは、古典物理が「関数」の微分方程式を扱うのに対し、（値域が数でない、従って非可換な）「作用素」の解析学であり、さらに場の量子論ではこの作用素が連続パラメーターを持って現われる、という位の知識しかない筆者が、その理論の最近の発展を云々するというのは何ともおこがましいが、近年この場の量子論が我々の代数幾何学へと異常接近し、しかもその結果我々の今まで全く気付かなかった新しい様相が見えてきたと思われ、この様子を代数幾何学の側から観測したレポートとして本稿を草することとした。

この異常接近は「量子物理学の幾何化(geometrization)」として特徴付けられる。すなわち、量子物理学を局所理論ではなく、多様体上の大域的理論として、その多様体の幾何的諸性質を本質的に用いつつ理論を展開しようという方向である。この方向の第一波は量子ゲージ理論の分野で７０年代後半に生じ、８０年代に入ってその第二波としての紐の理論（２次元重力場の理論）で一層顕著なものとなった。しかも前者の数学への影響範囲が高々微分幾何学（および一部の代数幾何学）という限定されたものであったのに対し、今回のそれは数論から確率論までを含む純粋数学の殆どあらゆる分野にわたっており、そこに全く新しい幾何学の誕生することさえ予感される。それらについてはいくらでも妄想をたくましくすることができるが、ここは Maninの論考（〔M〕）を引用して、閑話休題。

現在の中心的研究は２次元共形場の理論(conformal field theory)という枠組みの上で行なわれている。元来この理論が注目を引くようになったのは、統計力学の可解モデルの理論において、その臨界点での漸近挙動として（離散モデルの極限として連続パラメーターを持った）共形場の理論が出現することが見出されたためである。この理論は Belavin, Polyakov, Zamolodchikov 〔BPZ〕 によって定式化された（１９８４）。そこではprimary field あるいは vertex operator という概念が基本的で（後述）、それを基礎にoperator formalismと呼ばれる方法論によって理論が構築される。またそこではVirasoro algebraという無限次元リー環の表現が重要な役割を果たす。しかしこの vertex operatorの概念は数学者には非常に分かりにくいもので、それは土屋昭博等の仕事〔TK〕によって初めて数学的に明確なものになった（１９８８）。

一方Polyakovの１９８１年の論文〔P〕に始まった弦模型理論（紐の理論）の復活は、Belavin, Knizhnik 〔BK〕によってリーマン面のモデュラス理論との密接な関係が指摘され（１９８６）、さらにいわゆる期待値関数として保型形式が現われること、代数幾何でのMumfordの定理（本質的にRiemann-Rochの定理）を用いると２６次元の平坦な空間への紐の埋め込みを

考えればいわゆる anomalyのない理論ができること等が指摘されて、一挙に注目されるに至った。(ここでいわゆる超弦理論への発展があるが、最近は著しい進展がないので省く。)

しかし物理学者の方法は径路積分を用いるもので、彼らの結果を数学的に正当化することは殆ど不可能である。そこへFriedan-Shenker〔FS〕が普遍モデュラス空間上の2次元共形場の理論として弦模型理論を構築するという卓抜なアイデアを提出した(1987)。

この構想を数学的に厳密なものとするためにはoperator formalismを一般種数のリーマン面の族上で展開する必要がある。その基礎はVirasoro algebraがリーマン面のモデュラス空間上の運動を引き起こすという事実である(〔EO〕,〔BMS〕)(実は対応する古典レヴェルのリー環Witt algebraの作用に落ちる－§1c))。一方いわゆる fermion-bozon対応によって相関関数の異なる表示が得られるが、これが Fayの一般化されたtrisecant identityに他ならないことが注意された(1986)。後者はリーマン面のヤコビ多様体に対応するテータ関数のみが満たす等式で、Schottky問題と深い関わりを持つ(〔Mum1〕,〔vdG〕).そしてSchottky問題はNovikov 予想としてKP方程式論と関連する(Novikov予想は塩田隆比呂によって解かれた〔S〕,〔Mul〕)。確かに伊達－神保－柏原－三輪〔DJKM〕はKP方程式論を fermion-bozon対応の枠組みを用いて展開した(1983)。この対応でKP方程式の解の時間発展はヤコビ多様体上の線形カレントに他ならない。従ってこれをVirasoro algebraの作用を含む、つまりリーマン面のモデュラスをも動かす形に理論を一般化すれば可換ゲージ群(自由フェルミ粒子)の場合の共形場の理論が得られる。実際1987年無限次元グラスマン多様体を中心概念とする佐藤幹夫のKP方程式論と Kricheverの幾何的KP方程式論を総合すれば、その枠組みの中で見事に理論を構築できることが示された(〔IMO〕,〔W1〕,〔KNTY〕,〔KN〕,〔ACKP〕,〔BS〕,〔A-GGMV〕)。

次いで1988年土屋昭博は可換ゲージでの経験を踏まえ、彼の$\mathbb{P}^1$上での仕事を拡張する形で非可換ゲージ群に対する一般リーマン面上のoperator formalism (Wess-Zumino 理論)を展開することに成功する(〔TY〕,〔TUY〕)。ここで構成されたモデルは後述するようにリーマン面のモデュラス空間上の射影接続を持つベクトル束(Friedan-Shenkerのいうゲージ系)なのだが、その「モノドロミー」表現に由来する組み合わせ的構造を持っている。E. Verlindeによって指摘されたそうした構造の研究が昨年から今年にかけての共形場の理論の話題の中心の一つとなっている(〔Ve〕,〔MS〕,〔Va〕)。またこのベクトル束のより幾何学的な構成も試みられている(Hitchin－未発表、〔H〕参照)。さらにWittenによる3次元トポロジーとの関連も現在非常に注目されている(〔W2〕)。

しかしこうした最もホットな話題についての詳細は専門の紹介(例えば〔G〕)に委ね、本稿では代数幾何学との関連を明確にすることと、土屋理論の簡単な紹介を目標としたい。

§１．リーマン面上のモデュラス空間の一意化

ａ）リーマン面のモデュラス空間の新しい見方

では場の量子論によってもたらされた新しい幾何学の方法論とは何か？　それは一口に言えば、無限次元多様体の幾何学の導入である。そこに働く群（物理では「シンメトリー」の用語を好む）も無限次元の群である。しかし無限次元群を直接扱うのは困難が伴うので（微分幾何学ではその方向で研究が進展しているが、今ここでは触れない）、理論をVirasoro algebra, affine Lie algebra といった無限次元リー環の作用とそのモノドロミー表現を調べる形に変える。また無限次元になったことに伴う発散を繰り込む必要があって、そこに方法論的困難が生じる。ここで注意しておきたいのは、この無限次元化が、微分方程式論で無限次元線形空間を導入したそれとは全く違うということである。後者の場合各々の関数は無限次元空間の中で性格のないただの点になってしまった。しかし今の場合には、関数はあくまで関数であって、ただしそれは無限次元多様体上の関数なのである。それが無限次元多様体上に働くシンメトリーによって不変であるとき、その関数は軌道空間である有限次元多様体上の関数と同一視されるという仕組みになっている。

さてこの結果共形場の理論はいかなる幾何学として見えてきたか？　その答えを標題的に言えばリーマン面の写像類群に伴う保型形式論となる。（ただしこの保型形式はベクトル値、あるいは多価を許す。）　これを例えばジーゲル・モデュラ形式との対応で見よう。

モデュラス空間	偏極アーベル多様体	リーマン面
普遍被覆空間	ジーゲル上半平面	真空（基底状態）全体のなす空間
作用群	Ｓｐ（g，$\mathbb{R}$）	Witt algebra（リー環）
離散部分群	Ｓｐ（g，$\mathbb{Z}$）と通約的な部分群	リーマン面の写像類群
保型因子	ヤコビ行列式（の巾）	写像類群のモノドロミー表現
保型形式	ジーゲル保型形式	τ関数、Ｎ点相関関数
それらのなす束	（特に名前はない）	determinant束、ゲージ系

耳慣れぬ言葉が並んでいるが、本質的には知られているものが殆どで、代数幾何学を知っている者がこれらを理解することは難しくない。ここで新しいことはただ一つ、リーマン面のモデュラス空間がこのように（無限次元ではあるが）等質空間として表わされ、その故に一般の保型形式と類似の取り扱いができるようになったという点にある。しかし土屋理論はこの幾何学にとって画期的な進展になった。なぜならこの見方からするとそれは非可換ゲージ群に対応する保型関数論だからである。 Langrandsプログラムとの対応で言えば、氏の理論は非可換類体論の古典幾何版を提出する筈であるが、それがどのようなものかは未だ全く見えていない。

b）可換ゲージ群

Virasoro algebraの幾何学的意味について述べる前に、その仕組みを読者に理解していただくため、より簡単な可換ゲージ場の場合をまず説明しよう。つまりゲージ群が可換乗法群 $\mathbb{C}^*$ の場合である。

今リーマン面Rとその上の点Qが所与とする。R上の直線束 $\mathcal{L}$ に対し集合

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \{t : \mathcal{L}_Q \to \mathcal{O}_Q,\ \text{Qでの自明化}\}$$

を考える。$\mathcal{O}_Q$ への積により $\mathcal{O}_Q^*$ が $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ に作用し、しかもその作用は推移的かつ忠実である。つまり基点 t_0 をとれば、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Q^* & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \\ f & \mapsto & f\,t_0 \end{array}$$

この作用はゲージ変換と呼ばれる。これを無限小にすれば、$\mathcal{O}_Q = \mathrm{Lie}\,(\mathcal{O}_Q^*)$ が大域的ベクトル場として $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ の接束に作用し、しかもそれは積分できて、$f \in \mathcal{O}_Q$ に対する１パラメーター部分群は $\exp(tf) \in \mathcal{O}_Q^*$ である。

今Rのヤコビ多様体J＝J（R）を考える。これはR上の直線束のモデュラス空間（ピカール多様体）と見られる。そこでJ上にファイバー空間

$$\tilde{J} = \tilde{J}(R) = \bigcup_{\mathcal{L}} \mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \{(\mathcal{L}, t)\ ;\ [\mathcal{L}] \in J,\ t \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}\}$$

を考えれば、$\tilde{J}$はJ上の $\mathcal{O}_Q^*$ －主ファイバー束になる。

ここで次の事実に着目することが以下の理論の出発点である。

主張G．$\mathcal{O}_Q = \mathrm{Lie}\,(\mathcal{O}_Q^*)$ の$\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$への（無限小）作用はK（$\mathcal{O}_Q$）の$\tilde{J}$へのそれへと拡張され、その作用は$\tilde{J}$の接束上推移的である。すなわち$\tilde{J}$は（無限次元）可換リー環K（$\mathcal{O}_Q$）による無限小等質空間になっている。より詳しく言えば、上に定義された大域的ベクトル場

$$\theta : \mathcal{O}_Q \longrightarrow \Gamma(\tilde{J},\ \Theta(T(\tilde{J}/J)))$$

（$T(\tilde{J}/J)$ は$\tilde{J}$のファイバーに沿うベクトル場のなす$T(\tilde{J})$の部分束）が

$$\theta : K(\mathcal{O}_Q) \longrightarrow \Gamma(\tilde{J},\ \Theta(T(\tilde{J})))$$

に拡張され、$\mathbb{P}(\tilde{J}) = \tilde{J}/\mathbb{C}^*$ とすれば、$(\mathcal{L}, t) \in \tilde{J}$に対し、

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_{(\mathcal{L},t)}\mathbb{P}(\tilde{J})/J & \to & T_{(\mathcal{L},t)}\mathbb{P}(\tilde{J}) & \to & T_{\mathcal{L}}J & \to & 0 \\ & & & & & & & & \text{（完全）} \\ & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\ 0 & \to & \mathfrak{m}_Q & \to & \dfrac{K(\mathcal{O}_Q)}{t\,H^0(R,\ \mathcal{O}(*Q))} & \to & H(R, \mathcal{O}) & \to & 0 \\ & & & & & & & & \text{（完全）} \end{array}$$

ただし$H^0(R,\ \mathcal{O}(*Q)) = \bigcup H^0(R,\ \mathcal{O}(nQ)) = \{$たかだかQにのみ極を持つR上の有理型関数$\}$。

証明は無限小n次までのQでの自明化を与えた直線束の変形空間の接空間がH^1(R,

$\mathcal{O}$（－（n＋1）Q））で与えられることに注意すればH^1 の$\check{\text{C}}$echコホモロジーの計算から簡単に出る（ただし以下のように形式的級数で考えないと収束性の証明が要る）。しかしこれをもっと直接的に見ることができる。

Qを中心とする座標近傍ϕ：U→D＝｛ζ；｜ζ｜＜ε｝をとる。さて$\mathcal{L}$の自明化t $\in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$が与えられているとする。このtについての考え方を次のように変える。すなわちRはR’＝R－｛Q｝とDとがϕによって貼り合わさってできているものと考えると、同様にtは$\mathcal{L}$を作るための$\mathcal{L}'$＝ $\mathcal{L}$｜R’と自明束D×$\mathbb{C}$との貼り合わせを与えているものと見られる。この時貼り合わせられる部分は $\mathcal{L}'$｜U’（U’＝U－｛Q｝）とD’×$\mathbb{C}$（D’＝D－｛0｝）であることに注意しよう。従ってf $\in$ K（$\mathcal{O}_Q$）をとっても$\mathcal{L}'$とD×$\mathbb{C}$とをexp（εf）tとずらして貼り合わせた直線束$\mathcal{L}(\varepsilon)$を作ることができる。これはもはや元の$\mathcal{L}$と同型であるとは限らない。しかしf$\in \mathcal{O}_Q$ならばexp（εf）は同型$\mathcal{L}$｜U→D×$\mathbb{C}$へ延びるから、この貼りかえは$\mathcal{L}$の自明化にゲージ変換を施しただけのものである。一方f $\in$ H^0(R、$\mathcal{O}$(＊Q)）ならば、exp（－εf）によるゲージ変換を$\mathcal{L}'$に施せるので、やはり$\mathcal{L}(\varepsilon) \cong \mathcal{L}$になる。そして変形理論によれば、すべての$\mathcal{L}$に近い直線束は上のような変換によって得られるというわけである。

c）Witt algebraによるモデュラス空間の一意化

リーマン面の１点での座標変換の全体G＝Aut（$\mathcal{O}$）（$\mathcal{O}$＝$\mathbb{C}$｛ζ｝：収束巾級数環）は無限次元の群をなす。集合としては$\varphi \to \varphi(\zeta)$という対応によってAut（$\mathcal{O}$）は

$$\mathfrak{m}-\mathfrak{m}^2=\{\varphi(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots;\ a_1\neq 0\}$$

($\mathfrak{m}$＝$\zeta\mathcal{O}$は$\mathcal{O}$の極大イデアル）に同型である。これに対応するリー環Der（$\mathcal{O}$）は$\mathcal{O}\zeta$（d／dζ）と書ける。以下では一々収束を考えないために$\mathcal{O}$の代わりに形式的巾級数環$\hat{\mathcal{O}}$＝$\mathbb{C}$［［ζ］］を考えよう。

ここでリーマン面のモデュラス空間上の普遍曲線族π：$\mathcal{C}_g \to \mathcal{M}_g$を考える。それはリーマン面＋１点のモデュラス空間$\mathcal{C}_g$＝｛R，Q；Q $\in$ R｝ともみなせる。（Rの自己同型群が自明でないとき両者に違いが出るが、その場合には議論に適当な修正を施す。） さて前項の手法に倣って、$\mathcal{C}$上に無限次元ファイバー空間を構成する：

$$\hat{\mathcal{C}}=\{X=(R,Q,u);\ u:\hat{\mathcal{O}}_Q\to\hat{\mathcal{O}}\text{、QでのRの（形式的）局所座標}\}.$$

するとこの$\hat{\mathcal{C}}$には有限次元複素多様体の（可算）射影極限としての複素構造が入り（ただし無限次元）、射影π：$\hat{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$は正則になる。さらにただちに分かるように、$\pi$は G＝Aut（$\mathcal{O}$）を構造群とする主ファイバー束になっている。逆に言えば$\mathcal{C}$は$\hat{\mathcal{C}}$のGによる軌道空間なのである。

すると次のような、前項の主張に対応する命題が成り立つ。この命題が共形場の理論から見たリーマン面のモデュラスの理論の基本である。これは (BMS) において初めて指摘された（１９８６）。

主張M． Der（$\hat{\mathcal{O}}$）の$\hat{\mathcal{C}}$への作用はWitt algebra $\mathcal{D}$＝Der（K（$\hat{\mathcal{O}}$））

$=\mathbb{C}((\zeta))\zeta(d/d\zeta)$ のそれへと拡張され、後者の作用は $\hat{\mathcal{C}}$ の接束に推移的に作用する。すなわち

$$\theta:\mathrm{Der}(\hat{\mathcal{O}})\longrightarrow\Gamma(\hat{\mathcal{C}},\ \mathcal{O}(T(\hat{\mathcal{C}}/\mathcal{C})))$$

は

$$\theta:\ \mathfrak{d}\ \longrightarrow\Gamma(\hat{\mathcal{C}},\ \mathcal{O}(T(\hat{\mathcal{C}})))$$

に拡張され、X＝（R，Q，u）に対し

$$\begin{array}{cccccccc}
0\to & T_X\hat{\mathcal{C}}/\mathcal{C} & \to & T_X\hat{\mathcal{C}} & \to & T_{(R,Q)}\mathcal{C} & \to 0 & \\
& \wr| & & \wr| & & \wr| & & (\text{完全})\\
0\to & \mathrm{Der}(\hat{\mathcal{O}}) & \to & \mathfrak{d} & \to & H^1(R,\ \mathcal{O}(T(-Q))) & \to 0 & \\
& \| & & uH^0(R,\ \mathcal{O}(T(*Q))) & & & & (\text{完全})\\
& \mathcal{O}\zeta(d/d\zeta) & & & & & & (g\geq 2).
\end{array}$$

ここで空間 $\hat{\mathcal{C}}$ が無限次元ではあるが、本質的に有限次元的であることを注意しておこう。すなわち$G_1=\{\varphi\in\mathrm{Aut}(\hat{\mathcal{O}})\ ;\ \varphi(\zeta)=\zeta+a_2\zeta^2+\cdots\}$とし、$\mathcal{C}_g^{(1)}=\mathcal{C}_g/G_1$とすれば、$\mathcal{C}_g^{(1)}$は$T^*\mathcal{C}_g-\mathcal{C}_g$（$\mathcal{C}_g\subset T^*\mathcal{C}_g$ は0－切断による埋め込み）と同一視される。つまり$\mathcal{C}_g$上の$\mathbb{C}^*$－束である。ところで対応するリー環 $\mathfrak{d}_1=\mathfrak{m}\zeta(d/d\zeta)$ の作用は積分できる。実際 $\ell\in\mathfrak{d}_1$ に対し $\hat{\mathcal{O}}\ni f\to\exp(\ell)(f)=\sum(1/k!)(\ell^k)(f)\in\hat{\mathcal{O}}$ はG_1の元を定める。しかもこの対応は明らかに単射的だから、ファイバー空間 $\hat{\mathcal{C}}_g\to\mathcal{C}_g$ は（無限次元）アフィン空間をファイバーとしており、両者はホモトピー同値である。

d）量子化

Witt algebraの作用は物理的に言えばまだ量子化されていない作用である。序で述べたVirasoro algebraはWitt algebraの作用の量子化として自然に現われる。「量子化」という概念を（数学的に）完全に理解することは非常に難しいが、ここでのその意味は幾何学的に明瞭に言うことができる。すなわちリーマン面上の場の量子論での量子化とはモデュラス多様体の直線束あるいはベクトル束上へのWitt algebraの作用の持ち上げに他ならない。

具体的に例をとって説明しよう。リーマン面の普遍族$\pi:\mathcal{C}_g\to\mathcal{M}_g$上には相対余接束$T^*=T^*(\mathcal{C}/\mathcal{M}_g)$がある。今簡単のため$g\geq 2$とする。正整数jに対し$\pi_*(\mathcal{O}(T^{*\otimes j}))$は階数$r=(g-1)(2j-1)$　（$j>1$）、g　（$j=1$）の局所自由層になる。直線束

$$D(j)=\bigwedge^r\pi_*(\mathcal{O}(T^{*\otimes j}))$$

はcharge jの determinant束と呼ばれる。Mumfordの定理は

$$c_1(D(j))=(6j^2-6j+1)\,c_1(D(1))$$

を言う。さて一切の議論を省いて結論のみ言えば（詳しくは例えば〔KNTY〕参照）、Witt algebraの中心拡大

$$\tilde{\mathfrak{d}}^{(j)}=\mathfrak{d}\oplus\mathbb{C}e$$

ただし ℓ_1、$\ell_2 \in \mathcal{D}$に対し

$$[\ell_1, \ell_2]_{\hat{\mathcal{D}}(j)} = [\ell_1, \ell_2]_{\mathcal{D}} - e((6j^2-6j+1)/6)\,\mathrm{Res}_{\zeta=0}\,\ell_1'''\ell_2$$

eは中心、を考えると、$\mathcal{D}$の$\hat{\mathcal{C}}_g$への作用は、D（j）の$\hat{\mathcal{C}}_g$への引き戻し$\hat{D}$（j）への$\hat{\mathcal{D}}^{(j)}$の作用へと持ち上がる。ここでeは$\hat{D}$（j）のファイバーへのスカラー作用素（オイラー作用素）として働く。この$\hat{\mathcal{D}}^{(j)}$はcentral charge $-2(6j^2-6j+1)$のVirasoro algebraと呼ばれる。

中心拡大の所になぜこのような因子が出て来るかはリー環のコホモロジー$H^2(\mathcal{D})$が1次元でそれが2－コサイクル（ℓ_1，ℓ_2）→$\mathrm{Res}_{\zeta=0}(\ell_1'''\ell_2)$によって生成されるという事実による（詳しくは(ACKP)参照）。

ちなみにb）で述べたゲージ群の場合、ヤコビ多様体J上の主偏極を与える直線束があるが、その$\hat{J}$への引き戻しに$\mathbb{C}((\zeta))$の中心拡大である無限次元Heisenberg algebraが作用する。その作用はリーマン面のJへの埋め込みを用いて具体的に書ける（(KNTY)参照）。

e）モノドロミー表現

上に見たようにD（j）は$\hat{\mathcal{C}}$上に行っても自明にならない。これを自明化するためには理論を Teichmüller空間にまで持ち上げなければならない。すなわち

$$\mu : T_g \to \mathcal{M}_g$$

を Teichmüller空間T_gによるモデュラス空間の被覆とする。これは分岐ガロア被覆で、その被覆群が写像類群M_gに他ならない。ファイバー積をとることですべての概念をT_g上に引き上げる。対応する概念は添え字Tを付けて表わそう：$\hat{\mathcal{C}}_T$ etc。すると determinant束$\hat{D}(j)_T$等はここでは自明になり、Virasoro algebraの作用はそこでの平坦接続を与える。逆に言えばM_g上の指標がVirasoro algebraの作用のモノドロミー表現として定義できて、D（j）はその商となっている。図式で書けば

$$\begin{array}{ccccc} D(j) & = M_g\backslash & \hat{D}(j)_T & / & \hat{\Theta}(d/d\zeta) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{M}_g & = M_g\backslash & \hat{\mathcal{C}}_T & / & \hat{\Theta}(d/d\zeta) \end{array}$$

（$\hat{\Theta}(d/d\zeta)$は定義から自然にVirasoro algebraのsubalgebraともみなせる）。

序で述べた自由フェルミ粒子に対応する場の量子論はj＝1／2の場合に当たり、この場合には level 2構造の入ったリーマン面のモデュラス空間（$\mathcal{M}_g$のSp（g，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）被覆）上に determinant束が構成でき、そこにcentral charge 1のVirasoro algebraが作用することになる。ここで注意すべきはこのモノドロミー表現がSp（g，$\mathbb{Z}$）に簡約できないことで、ホモロジーでは捉えられないリーマン面のホモトピー的性質が determinant束のD－加群としての構造に関係してくることを示している。

§２．一般リーマン面上の共形場の理論（土屋理論）

本節では最近の土屋氏による一般リーマン面上の Wess-Zumino理論（非可換ゲージ対称性の下の共形場の理論）を紹介する。非常に広大な理論なので、ここではごく入門的な扱いしかできない。詳細は原論文〔TUY〕を参照されたい。

ａ）基本的作用素とその作用素展開

まず始めに注意しておくが、ここで展開される共形場の理論では、向きを保つ共形変換のみを考え、作用素のパラメーターも、本来は正則、反正則（u，$\bar{u}$）と２変数であるのを片方の正則部分にのみ（正則に）依存するように簡約されている。（従って出てくる作用素の数も半分。）　こうした理論はchiralとよばれる。本来の共形場の理論はchiralなものとその（複素）共役との和になる。

さて共形場の理論（以下ではＣＦＴと略記する）とは、コンパクト・リーマン面Ｒにパラメーターを持つ以下のような作用素の系を構成することである。（なぜこのような系を考えるかという理由を説明するには様々の物理的背景に立ち戻らねばならず、筆者のあずかり知らぬところなので、ここは土屋氏の受け売りのままにしておく。）

Ⅰ）重力場。これはＲ上の一般座標変換に対応するゲージ場である。ここでの場の作用素　$T(z)\,dz^2$ は energy-momentumテンソルと呼ばれ、Ｒ上のねじれた２次微分形式である。すなわち$w=w(z)$という座標変換を施すと

$$T(w)\,dw^2 = T(z)\,dz^2 - (C/12)\,\{w,z\}\,dz^2$$

と変換される。ここで $\{w,z\} = (w'''/w') - (3/2)\,(w''/w')^2$ はSchwarz微分。ここに出てくる$c \in \mathbb{C}$（後にはＱ）は理論の重要な不変量である。

Ⅱ）ゲージ場。ここではある複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ を選んで固定する。これは理論の「関数」が数ではなく対応するリー群に値を持っているものと考えられる。ゲージ場の作用素はカレント・テンソル

$$X(z)\,dz,\quad X \in \mathfrak{g},\ z \in R$$

と呼ばれ、Ｘについて線形に依存して、正則形式の変換性を持つ。

Ⅲ）物質場。これが現実の「粒子」の作る場であるわけだが、それは$\mathfrak{g}$の有限次元表現の和にパラメーターを持つ。ここでは全体としても有限次元であることを要請し、従ってそれは既約表現の和

$$V = \sum V_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\ (\text{有限集合})$$

になっている。物質場での作用素（vertex作用素）は、これをパラメーターとして

$$\Psi_\lambda(u,z)\,(dz)^{\Delta_\lambda},\quad u \in V_\lambda$$

と書かれ、物理的には（Ｒ，Ｑ）における「真空」（基底状態）に対応する。ただしこの真空は一意的とは限らない。これはuについて線形に依存する。またΔ_λは非負有理数で、従って一般にzについて正則多価になっている。この多価性が理論の把握を困難にするが、その一方でその解析を通して多様体の大域的構造が知られる。このΔ_λもやはり理論の不変量である。

さてこれらの作用素の作用は真空期待値（あるいは相関関数、振幅関数）と呼ばれるものを通して調べられる。それは作用素を（無限）行列とみたときの行列成分をとりだすことに他ならない。さて真空期待値とは、作用素の系$\Psi_{\lambda_1}(u_1, z_1)$，・・・，$X_1(w_1)$，・・・，$T(v_1)$，・・・を考えた時、これらに対して定まるR×・・・×R上の多価正則関数

$$\langle \Psi_{\lambda_1}(u_1, z_1) \cdots X_1(w_1) \cdots T(v_1) \cdots \rangle_R$$
$$(dz_1)^{\Delta_1} \cdots dw_1 \cdots (dv_1)^2 \cdots$$

で、対角線部分に特異性を持つもののことである。ただしその特異性は期待値の中で次のような形に見える（作用素積展開）：

1）$z=w$の近くで（以下では一々こう断わらない）

$$\Psi_\lambda(u, z)\,\Psi_\mu(v, w) = \sum_\nu (z-w)^{\Delta_\nu-\Delta_\lambda-\Delta_\mu}\{\Psi_\nu(C^\nu_{\lambda\mu}(u, v), w)+o(z-w)\},$$

ここで$C^\nu_{\lambda\mu}: V_\lambda \times V_\mu \to V_\nu$ は$\mathfrak{g}$－共変な双一次写像；

2）$$X(z)\,\Psi_\lambda(u, w) = (1/(z-w))\,\Psi_\lambda(Xu, w)+O(z-w);$$

3）$$T(z)\,\Psi_\lambda(u, w) = (\Delta_\lambda/(z-w)^2)\,\Psi_\lambda(u, w) + (1/(z-w))\,(\partial/\partial w)\,\Psi_\lambda(u, w)+O(z-w),$$

ここで$\Delta_\lambda \in \mathbb{Q}$；

4）$$X(z)\,Y(z) = (\ell(X, Y)/(z-w)^2)\,Id + (1/(z-w))\,[X, Y](w)+O(z-w),$$

ここで$\ell \in \mathbb{N}$、$(\ ,\ )$は$\mathfrak{g}$上の$\mathfrak{g}$不変な内積で、極大ルートθに対して$(\theta, \theta)=2$と正規化されている；

5）$$T(z)\,X(w) = (1/(z-w)^2)\,X(w) + (1/(z-w))\,(\partial/\partial w)\,X(w)+O(z-w);$$

6）$$T(z)\,T(w) = (c/2(z-w)^4) + (2/(z-w)^2)\,T(w) + (1/(z-w))\,(\partial/\partial w)\,T(w)+O(z-w).$$

ここでℓ、c、Λ、Δ_λ、$C^\nu_{\lambda\mu}$ は理論の持つパラメーターであるが、それらは互いに独立とは限らない。以下に行う幾つかの要請から、これらのパラメーターは順次定まる。作用素積展開を見るとΨ、X、T各々の（左からの）作用は同じ形の特異性を持っている。ただしXY、TTにはそれぞれ２次および４次のより高い特異性があらわれ、gauge anomaly, conformal anomalyと呼ばれる。これはこれらの作用素が関数の上にではなく、自明でない直線束の上のそれになっている効果である（厳密には振れ微分作用素というもの）。

b）ゲージ場とアフィン・リー環

前項で与えた作用素積展開の条件より、パラメーターがコンパクト・リーマン面にあることから場の作用素が次々に定まってゆく。土屋理論ではゲージ場の作用素から出発して他のそれを構成してゆく。ゲージ場ではその作用の gauge anomalyから自然にアフィン・リー環の表現が生じ、それが理論の基礎になる。

リーマン面R上の点Qを考え、Qを中心にする局所座標ζをとる。Qを可変パラメーターとして動かすときはzで表わす。さて$X \in \mathfrak{g}$を定めるとリーマン面上の有理型関数fに対し、作用素$\widetilde{X}[f]$が次のように定義される：

$$\widetilde{X}[f]\Psi_\lambda(u,z) = \mathrm{Res}_{\zeta=\zeta(Q)} f(\zeta)\,X(\zeta)\,\Psi_\lambda(u,z)\,d\zeta.$$

もしfがQで正則なら前項の2）から

$$\widetilde{X}[f]\Psi_\lambda(u,z) = f(z)\,\Psi_\lambda(Xu,z)$$

である。つまり$\widetilde{X}[f]$は$f(z)X$という無限小ゲージ変換である。

ところがこれらの作用素の交換関係を見ると、4）から

$$\widetilde{X}[f]\,\widetilde{Y}[g] - \widetilde{Y}[g]\,\widetilde{X}[f]$$
$$= \widetilde{[X,Y]}(fg) - \ell(X,Y)\,\mathrm{Res}_{\zeta=\zeta(Q)} df(\zeta)\,g(\zeta)\ \mathrm{Id}$$

となる。つまりこれらはアフィン・リー環の交換関係に従っている。言い換えればQでの局所座標による展開を用いて定義した埋め込み

$$\begin{array}{c} \mathfrak{g}\otimes K(\mathcal{O}_Q)\oplus \mathbb{C}\ \mathrm{Id} \\ \cap \\ \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((\zeta))\oplus\mathbb{C}e \end{array}$$

はリー環としての埋め込みになっている。しかも$\widehat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g}\otimes\zeta\mathbb{C}[[\zeta]]$とすれば、$\widetilde{X}[f]\in\widehat{\mathfrak{g}}_+$となるのは$f(Q)=0$と同値だから、

$$\widehat{\mathfrak{g}}_+\Psi_\lambda(u,z) = 0$$

となる。つまりこの表現はhighest weight表現になっている。

ここで我々は重要な要請を置く。

仮定。 この表現は可積分(integrable)表現である。すなわちℓは正整数であり、しかもすべての作用は局所巾零である。このℓはレヴェルと呼ばれる。レヴェルℓの可積分既約表現は$\mathfrak{g}$の有限次既約表現V_λから生成される：

$$\mathcal{H}_\lambda = \{\{v = X_1[f_1]\cdots X_N[f_N]\,u\,;\,u\in V_\lambda\}\}.$$

ただし表現が可積分になるためには$0 \leqq (\theta,\lambda) \leqq \ell$という条件が要る（（　，　）、$\theta$は前項4）を参照）。ここでさらに

$$\Psi_\lambda(v,z) = \widetilde{X}_1[f_1]\cdots\widetilde{X}_N[f_N]\,\Psi_\lambda(u,z)$$

がwell-definedであると仮定しよう。つまりΨ_λのパラメーターが$\mathcal{H}_\lambda$に拡張されるとするのである。すると真空期待値からΨ_λは$\mathcal{H}_\lambda$上の線形汎関数とみなせる：

$$\begin{array}{cccc} \langle\Psi_\lambda| : & \mathcal{H}_\lambda & \to & \mathbb{C} \\ & \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ & v & \mapsto & \langle\Psi_\lambda(v,z)\rangle_R. \end{array}$$

$\mathcal{H}_\lambda$上の連続線形汎関数（$\mathcal{H}_\lambda$上には自然な位相が入る）の空間を$\mathcal{H}_\lambda^\dagger$と記せば、$\langle\Psi_\lambda| \in \mathcal{H}_\lambda^\dagger$になる。

c）ゲージ条件

前項で述べたように、（R、Q）を固定すると、vertex作用素に対し$\langle\Psi_\lambda| \in \mathcal{H}_\lambda^\dagger$ が定まるが、この像はどのように決定されるのであろうか。それがゲージ条件と呼ばれるものである。それは本質的に代数関数論の留数定理と双対性からの帰結である。

問題を少しく一般化して、N個の点Q_1，・・・，Q_N をとり、各点で$\hat{\mathfrak{g}}$の既約表現$\mathcal{H}_{\lambda_1}$，・・・，$\mathcal{H}_{\lambda_N}$を考える。各λ_j は条件$0 \leqq (\lambda_j, \theta) \leqq \ell$を満たしているとする。簡単のため記号$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ を用いる。前項と全く同様に作用素の積$\Psi_{\lambda_1}\cdots\Psi_{\lambda_N}$は期待値$\langle\Psi_{\lambda_1}\cdots\rangle_R$ によって$\mathcal{H}_{\vec{\lambda}} = \mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N}$ 上の連続汎関数

$$\langle\Psi_{\vec{\lambda}}| \in \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}^\dagger$$

を定める。この像を$\mathfrak{X} = (R, Q_1, \cdots, Q_N)$ でのN点関数の空間 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ と呼び、それを決定する問題を考えよう。

そのための基礎になるのは、古典的代数関数論で知られた次の定理である。

定理。 各点Q_j で局所座標ζ_j をとる。これらを用いた展開によって埋め込み

$$U = H^0(R, \mathcal{O}(\Sigma * Q_j)) \subset \oplus\mathbb{C}((\zeta_j)) = A,$$

$$U^\dagger = H^0(R, \Omega(\Sigma * Q_j)) \subset \oplus\mathbb{C}((\zeta_j))d\zeta_j = A^\dagger$$

（$\Omega = \mathcal{O}(T^*)$）を定義する。AとA† との間の自然な双線形形式

$$\langle (f_j), (\omega_j) \rangle = \sum_j \mathrm{Res}_{\zeta_j=0} f_j\omega_j$$

によってUとU† とは互いに零化空間である。

すると自明な表現によって点を増やしても解が増えないこと（真空の伝播）と留数定理を用いれば、この定理から先の問題の答えが与えられる。すなわち

命題。$\mathfrak{X} = (R, Q_j, \zeta_j)$ に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) &= \{\langle\Psi_{\vec{\lambda}}|\} \\ &= \{\langle\Psi| \in \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}^\dagger ; \sum_j \langle\Psi_\lambda|\rho_j(\widetilde{X}[f]) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}, \\ &\qquad \forall f \in H^0(R, \mathcal{O}_j(\tilde{\Sigma} * Q_j))\}\end{aligned}$$

（ρ_j は$\widetilde{X}[f]$ のj成分$\mathcal{H}_{\lambda_j}^\dagger$ への双対表現）。

d）Virasoro algebraと運動方程式

ゲージ場の作用からアフィン・リー環の表現が現われたように、重力場の作用からVirasoro algebraの表現が導かれる。

再びR上の点Qを固定し、Qを中心とする局所座標ζをとろう。Qの近くで有理型なベクトル場$\ell = \ell(\zeta)(d/d\zeta)$ に対し、作用素$\widehat{T}[\ell]$を

$$\widehat{T}[\ell]\Psi_\lambda(u, z) = \mathrm{Res}_{\zeta=\zeta(Q)} d\zeta\, \ell(\zeta)(d/d\zeta)\Psi_\lambda(u, z)$$ と

して定義する。ℓ がQで正則ならばa）の3）から

$$\widetilde{T}[\ell]\Psi_\lambda(u, z) = (\ell(z)(d/dz) + \Delta_\lambda \ell'(z))\Psi_\lambda(u, z)$$ と

なる。つまり$\widetilde{T}$は‘Δ_λ次’微分形式への作用になっている。

すると6）からこれらはcentral charge cのVirasoro algebraの交換関係に従う：

$$[\widetilde{T}[\ell_1], \widetilde{T}[\ell_2]] = -\widetilde{T}[[\ell_1, \ell_2]] + (c/12)\,\mathrm{Res}_{\zeta=\mathfrak{z}(Q)}\ \ell_1'''(\zeta)\,\ell_2(\zeta)\,d\zeta.$$

一方5）からゲージ場との交換関係は

$$[\widetilde{T}[\ell_1], \widetilde{X}[f]] = -\widetilde{X}[\ell(f)]$$

となる。そこで次のような要請を置く。$\widetilde{T}[\ell]$ の作用はintertwineされる。すなわち連続線形作用素$\widetilde{T}(\ell) : \mathcal{H}_\lambda \to \mathcal{H}_\lambda$ があって

$$\widetilde{T}[\ell]\,\Psi_\lambda(u, z) = \Psi_\lambda(\widetilde{T}(\ell)\,u, z).$$

実際にこの要請の満たされることは Casimir作用素をアフィン化した菅原形式の存在によって保証される。

さて今度はリーマン面とN個の点を動かしてみる。その全体は（一般に）3g－3＋N次元のモデュラス空間 $\mathcal{M}_{g,N}$ をなし、変形理論からその接空間は$H^1(R, \Theta_R(-Q_1-\cdots-Q_N))$ で与えられる（$\Theta=\mathcal{O}(T)$）。§1、c）と同様、Witt algebraN個の直和 $\overset{N}{\oplus}\,\mathfrak{d}$ が推移的に $\mathcal{M}_{g,N}$ に作用する。先程のゲージ条件の解空間 $\mathcal{V}_\lambda^\dagger$ を $\mathcal{M}_{g,N}$ 上の層として定義する。するとリーマン面へのWitt algebraの作用は $\mathcal{V}_\lambda^\dagger$ へのVirasoro algebraの作用に持ち上がる。それは上の作用$\widetilde{T}(\ell)$ と両立する（Ward－高橋恒等式）。それは $\mathcal{V}_\lambda^\dagger$ 上に射影接続が定義されていることで、これが真空の満たす運動方程式である。

e）主定理

我々は発見的考察をするため作用素と真空期待値を所与のものとして出発したのであるが、実際の理論の構成は上記と逆の道をたどる。ここでその議論の粗筋を述べよう。

出発点はアフィン・リー環のlevel ℓ の可積分既約表現である。これによりカレント・テンソルを定義し、菅原形式によって energy-momentumテンソルを定義する。これらは関係式4）－6）を満たす。ついでゲージ条件によって真空を定義し、その上でN点関数の存在を示すことになる。さらにN点付きリーマン面のモデュラス空間を考えてその上に層 $\mathcal{V}_\lambda^\dagger$ を定義し、Virasoro algebraが作用することを示すのであるが、その手続きは非常に込み入っている。一つ大切なことは、元来 $\mathcal{M}^{(\infty)}$ 上で定義されていた $\mathcal{V}_\lambda$ は、$\mathcal{M}^{(1)}$ にまで（接続を含めて）descendすることである。

さて土屋理論の主定理は次のように述べられる。数学的に厳密に定式化するには煩瑣な記号を準備する必要があるので、一部曖昧な形で述べる。

主定理1． $\mathcal{V}_\lambda^\dagger$ は連接的で、しかも局所自由である。特に $\mathcal{V}_\lambda^\dagger(\mathfrak{X})$ の次元は $\mathfrak{X}$ によらず一定である。

主定理2． $\mathcal{V}_\lambda^\dagger$ 上の接続は、$\mathcal{M}_{g,N}$ の安定曲線によるコンパクト化を考えたとき、そのふちで確定特異点を持ち、その特異性を記述できる。特に $\mathcal{V}_\lambda^\dagger$ はコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_{g,N}$ への自然な延長を持つ。

主定理3（Factorization property）．コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_{g,N}$ のふちには $\mathcal{M}_{g-1,N+2}$ 等が現われるが、それらとの関連が明確に記述できる。最も退化した曲線（既約成分がすべて

射影直線で、双対グラフが3点グラフであるもの）に対応するところでは $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ の自然な基底が書ける。

証明については何も言う余裕がないが、主定理１にはGabberの定理〔Ga〕が用いられることだけ注意しておこう。

§今後の問題

Ⅰ）真空束 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ の幾何的構成。

$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ はベクトル束としては $\mathfrak{M}_{g,N}$ 上に descendする。これは微分方程式という超越的方法で定義されたものであるが、実際は有理的なものに違いない。土屋氏は次の予想を提出している：

予想．$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ は１の巾根の体上定義される。すなわちＱに１の巾根を付加した体をＫとすれば、構造群がＧＬ（Ｋ）に簡約される（しかも実はＫは有限拡大でよいと思われる）。

さらに興味あるのは、このベクトル束を純幾何学的に構成する問題である。Hitchin の最近の研究によれば、$\mathcal{P}$ をリーマン面Ｒ上の準安定主Ｇ束（Lie（Ｇ）$=\mathfrak{g}$）のなすモデュラス空間とすると、

$$\mathcal{V}_{\phi}(R)=H^{0}(\mathcal{P},\ (\det)^{\otimes \ell})$$

（Ｎ＝０，ϕ：自明な表現）となるらしい。（一般のＮ点の場合も定式化できるが、ここでは省略する。）

Ⅱ）真空束 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ の組み合わせ的構造。

前節できちんと述べられなかったが、$\mathfrak{M}_{g,N}$ の安定曲線によるコンパクト化 $\bar{\mathcal{S}}_{g,N}$ は自然なstratificationを持ちその０次元strataの上で $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ は自然な基底を持つ（主定理３）。これらは１次元strataでつながっており、そこでの貼り合わせの関係式が fusion ruleとして与えられる。２次元strataを見ればそれらの間の両立条件が書ける。Verlinde〔Ve〕, Moore-Seiberg〔MS〕, Vafa〔Va〕らはこれらの関係式を具体的に書き（その多くは〔TK〕に既に出ている）、それらによって $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ は大域的に構成可能であるとした。彼らの議論は大筋で正しいと思われるが、数学的にはまだ完全に厳密なものと言い難い。これはこの束の写像類群のモノドロミー表現をどう記述するかという問題と同等である。

Ⅲ）ユニタリ性。

§２冒頭に述べたが、土屋理論はchiralであるので、本来の共形場の理論（ＣＦＴ）を得るにはこのモデルの二つのコピーをとって、その上にユニタリな内積を組む必要がある。先の $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ の幾何的構成の問題に関して言えば、$\mathcal{V}\oplus\overline{\mathcal{V}}$ が何か自然な Hodge構造としてとらえられるかどうかも興味ある問題である。

Ⅳ）普遍モデュラス空間

Friedan-Shenker〔FS〕はｇ、Ｎをすべて動かした $\mathfrak{M}_{g,N}$ 全体の和を考え、その上にＣＦＴを構成しようとしている。確かに本来ＣＦＴはそのように構成されねばならない。定理３によって土屋理論では、この構成を厳密にできる可能性がある。しかしこれはⅡ）の問題と関連

していて、どう定式化するかがなかなか難しい。

V）算術的構成

さらに進んで、このWess-Zumino ＣＦＴをSpec($\mathbb{Z}$)上構成することは数論的に非常に興味ある問題である。可換ゲージの場合にはSpec($\mathbb{Z}$)上での構成の試みがある。特にこのＣＦＴはガロア群Ｇａｌ（$\overline{\mathbb{Q}}$／Ｑ）による対称性があるはずで、これは非可換類体論を構成する問題と関連する。Drinfeldの elliptic moduleの理論が両者の関連を解明するてがかりになるかもしれない（〔D〕，〔Mum2〕も参照）。またGrothendieckの研究計画〔Gr〕中にある「レゴ」も何やらvertex作用素と関連がありそうにみえる。

References

〔ACKP〕 Arbarello,E., DeConcini,C., Kac,V.G., Procesi,C.;Moduli spaces of curves and representation theory, CMP, 117, 1-36 (1988)

〔A-GGMV〕 Alvarez-Gaumé,L., Gomez,C., Moore,G., Vafa,C.;Strings in operator foumalism Nucl.Phys., B303, 455-521 (1988)

〔BMS〕 Beilinson,A.A., Manin,Yu.I., Schechtman,V.V.;Localization of the Virasoro and Neveu-Schwartz algebra, Moscow preprint, 1986;published in LNM 1289 (1987) without appendix we cited. The next 〔BS〕 is the enlarged version of this appendix.

〔BS〕 Beilinson,A.A., Schechtman,V.V.;Determinant bundles and Virasoro algebras, CMP, 118, 651-701 (1988)

〔BK〕 Belavin,A.A., Knizhnik,V.G.;Complex Geometry and the theory of quantum strings, Sov. Phys. JETP, 64(2), 214-228 (1986)

〔BPZ〕 Belavin,A.A., Polyakov,A.M., Zamolodchikov,A.B.;Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum theory, Nucl.Phys., B241, 333-380 (1984)

〔DJKM〕 Date,E., Jimbo,M, Kashiwara,M., Miwa,T.;Transformation groups for soliton equations, Proc. RIMS Symp. on Non-lin. Integ. Sys., World Sci., 39-119 (1983)

〔Dr〕 Drinfeld,V.G.;Elliptic modules, Math.USSR-Sb., 23, 561-592 (1974)

〔EO〕 Eguchi,T., Ooguri,H.;Conformal and current algebras on a general Riemann surface, Nucl.Phys., B282, 308-328 (1987)

〔FS〕 Friedan,D., Shenker,S.;The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory, Nucl.Phys., B281, 509-545 (1987)

〔Ga〕 Gabber,O.;The integrability of characteristic variety, Amer.J.Math., 103, 445-468 (1981)

〔G〕 Gawedzki,K.;Conformal field theory, Sem.Bourbaki, Nr.704, Nov.1988

〔vdG〕 van der Geer,G.;The Schottky problems, LNM, 1111, Springer, 385-406 (1985)

(Gr) Grothendieck,A.;Esquisse d'un programme, preprint, 1984

(H) Hitchin,N.;Stable bundles and integrable systems, Duke Math.J., 54, 91-114 (1987)

(IMO) Ishibashi,N., Matsuo,Y., Ooguri,H.;Soliton equations and free fermions on Riemann surfaces, Preprint, 1986

(KNTY) Kawamoto,N., Namikawa,Y., Tsuchiya,A., Yamada,Y.;Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, CMP, 116, 247-308 (1988)

(KN) Krichever,I.M., Novikov,S.P.;Algebras of Virasoro type, Riemann surfaces and structures of the theory of solitons, Func.Anal.Appl., 21, 126-142 (1987);Virasoro-type algebras, Riemann surfaces and strings in Minkowsky space, Func.Anal.Appl., 21, 294-307 (1987)

(M) Manin,Yu.I.;New dimensions in geometry, LNM, 1111, Springer, 59-101 (1985)

(MS) Moore,G., Seiberg,N.;Polynomial equations for rational conformal field theories, Phys.Lett., B212, 451-460 (1988);Naturality in conformal field theory, preprint, 1988;Classical and quantum conformal field theory, preprint, 1988

(Mul) Mulase,M.;Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties, J.Diff.Geom., 19, 403-430 (1984)

(Mum1) Mumford,D.;Curves and Jacobians, Univ.Michigan Press, 1975

(Mum2) Mumford,D.;An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation..., Int.Symp.on Alg.Geom.Kyoto,1977, 115-153

(P) Polyakov,A.M.;Quantum geometry of bosonic strings, Phys. Lett., 108B, 207-210 (1981)

(S) Shiota,T.;Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Invent.Math., 83. 333-382 (1986)

(TK) Tsuchiya,A., Kanie,Y.;Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid group, Adv.St.in Pure Math., 16, 297-372 (1988)

(TUY) Tsuchiya,A., Ueno,K., Yamada,Y.;Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, in preparation

(TY) Tsuchiya,A., Yamada,Y.;Conformal field theory on moduli family of stable curves with gauge symmetries, Adv.Studies in Phys., 7

(Va) Vafa,C.;Towards classification of conformal field theories, Phys.Lett., B206, 421-426 (1988)

(Ve) Verlinde,E.;Fusion rules and modular transformations in 2d conformal field theory, Nucl.Phys., B300, 360-376 (1988)

(W1) Witten,E.;Quantum field theory, Grassmannians, and algebraic curves, CMP, 113, 529-600 (1988)

(W2) Witten,E.;Quantum field theory and the Jones polynomial, preprint, 1988